RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 febbraio 1916.

F. D'OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul differenziale dell'arco di curva.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Data una curva continua e rettificabile

$$C: \qquad x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

se le funzioni $x(t)\,, y(t)\,, z(t)$ sono assolutamente continue, la lunghezza $s(t)$ del suo arco, corrispondente all'intervallo $(a\,, t)$, è data dall'integrale classico

$$(1) \qquad s(t) = \int_a^t \sqrt{\overline{x'(t)}^2 + \overline{y'(s)}^2 + \overline{z'(t)}^3}\, dt \ (^1).$$

Da ciò si deduce, differenziando, che è *quasi dappertutto*

$$(2) \qquad \overline{ds}^2 = \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2 .$$

Nelle pagine che seguono dimostreremo [senza far uso della (1)] che questa formola è del tutto generale, vale a dire che essa sta tutte le volte che la curva C è rettificabile, siano o no le $x(t)\,, y(t)\,, z(t)$ assolutamente continue. Daremo poi una formula per l'espressione di $s(t)$, dalla quale scenderà, nell'ipotesi sopra ricordata, la (1).

(1) L. Tonelli, *Sulla rettificazione delle curve* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XLIII, 1908).

1. Inscriviamo nella C una poligonale π, di vertici consecutivi $P^{(0)}$, $P^{(1)}, \ldots, P^{(m)}$, corrispondenti ai valori $t^{(0)} = a < t^{(1)} < \cdots < t^{(m)} = b$ del parametro t. Detta $s^{(r)}$ la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{P^{(0)}\,P^{(r)}}$ della C, ad ogni valore di s compreso fra $s^{(r-1)}$ e $s^{(r)}$ corrisponde un punto P dell'arco $\overset{\frown}{P^{(r-1)}\,P^{(r)}}$, e ad ogni intervallo $\delta \equiv (s, s')$ di $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$ corrisponde un arco $\overset{\frown}{PP'}$ di $\overset{\frown}{P^{(r-1)}\,P^{(r)}}$, di lunghezza δ. Scelto ad arbitrio un numero positivo ε, consideriamo la funzione dell'intervallo δ

$$F(\delta) = 1 - \frac{PP'}{s(PP')} - \varepsilon,$$

dove PP' indica la lunghezza della corda PP' e $s(PP')$ quella dell'arco $\overset{\frown}{PP'}$ della C. Costruiamo per questa funzione $F(\delta)$, e relativamente all'intervallo $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$, i sistemi d'intervalli Δ e $\overline{\Delta}$ definiti nel n. 1 della mia Nota *Successione di curve e derivazione per serie* (1), e contrassegniamo tali intervalli con l'indice r, scrivendo $\Delta^{(r)}$ e $\overline{\Delta}^{(r)}$. Avremo, per ogni arco $\overset{\frown}{PP'}$, corrispondente a un $\Delta^{(r)}$, $1 - \frac{PP'}{s(PP')} \geq \varepsilon$, e, per ogni altro appartenente a $\overset{\frown}{P^{(r-1)}\,P^{(r)}}$ e tale che P sia esterno a tutti gli archi che corrispondono ai $\overline{\Delta}^{(r)}$, $1 - \frac{PP'}{s(PP')} < \varepsilon$. Inscriviamo in C una nuova poligonale π' servendoci dei vertici di π e dei punti corrispondenti agli estremi di un gruppo d'intervalli, comunque scelti in numero finito fra i $\Delta_n^{(r)}$ ($r = 1, 2 \ldots m$; $n = 1, 2, \ldots$). Indicando con L la lunghezza della C, e con gli stessi simboli π e π' le lunghezze delle poligonali π e π', abbiamo $L - \pi' < L - \pi$. Detta ora π_1' quella parte di π' che corrisponde agli intervalli $\Delta_n^{(r)}$ scelti, sia L_1 la somma degli archi di C relativi agli stessi intervalli. Si ha, dalla prima delle disuguaglianze sopra scritte, moltiplicando per $s(PP')$ e sommando, $L_1 - \pi_1' \geq \varepsilon L_1$, ed anche, essendo $L_1 - \pi_1' < L - \pi' < L - \pi$, $L_1 < \frac{1}{\varepsilon}(L - \pi)$; e siccome L_1 non è che la somma dei segmenti $\Delta_n^{(r)}$ scelti per costruire π', abbiamo

$$\sum_{r=1}^{m} \sum_{n} \overline{\Delta}_n^{(r)} \leq \frac{1}{\varepsilon}(L - \pi) \quad \text{e} \quad \overline{\Delta}_n^{(r)} \leq 3\,\Delta_n^{(r)}, \quad \sum_{r=1}^{m} \sum_{n} \overline{\Delta}_n^{(r)} \leq \frac{3}{\varepsilon}(L - \pi).$$

Conveniamo di prendere per poligono π quello che, fra i poligoni corrispondenti a divisioni di C in archi di ugual lunghezza e soddisfacenti alla

(1) Questi Rendiconti, gennaio 1916.

$L - \pi < \frac{1}{3}\varepsilon^2$, ha il minor numero di lati. È allora $\sum_{r=1}^{m} \sum_{n} \Delta_n^{(r)} < \varepsilon$, e, eccettuati al più i vertici di π ed i punti P appartenenti agli archi di C che corrispondono agli intervalli $\Delta_n^{(r)}$, è $1 - \frac{PP'}{s(PP')} < \varepsilon$, essendo P' un punto qualsiasi dell'arco $\overset{\frown}{P^{(r-1)}\,P^{(r)}}$ del quale fa parte P. Sostituendo, via via, ad ε, i valori $\frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^p}, \ldots$, si vede che, eccettuati al più i vertici dei poligoni π così determinati ed i punti P di C che fanno parte di un sistema numerabile di archi di lunghezza complessiva $< 2\varepsilon$, è $1 - \lim_{P' \to P} \frac{PP'}{s(PP')} = 0$. Da ciò si conclude che è quasi dappertutto (come è ben noto)

$$\lim_{P' \to P} \frac{PP'}{s(PP')} = 1. \tag{3}$$

2. Indichiamo con Ω_s l'insieme dei punti P di C nei quali non è verificata la (3). Per quanto si è visto or ora, quest'insieme può essere rinchiuso in una successione di archi non sovrapponentisi di C, di misura complessiva piccola a piacere; in altre parole, la sua misura, contata sulla curva stessa, è nulla. Sia Ω_t l'insieme di (a, b) che corrisponde a Ω_s nella corrispondenza determinata dalla funzione $s = s(t)$ fra i due segmenti (a, b) e $(0, L)$. Per tale corrispondenza, ad ogni punto t di (a, b) corrisponde un punto, ed uno solo, s di $(0, L)$, mentre ad ogni s di $(0, L)$ corrisponde o un punto t oppure un intero segmento di (a, b). Ad ogni intervallo (s_1, s_2) di $(0, L)$ corrisponde poi sempre un intervallo (t_1, t_2) di (a, b), ed è $s_2 - s_1 \geq \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\, dt$, perchè la $s(t)$, come funzione non decrescente, è a variazione limitata ed ha perciò, quasi dappertutto, la dirivata $s'(t)$ integrabile e ≥ 0. Ad ogni successione di archi non sovrapponentisi di C, ricoprenti Ω_s, corrisponde una successione di segmenti di (a, b) $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r, \ldots$ non sovrapponentisi e ricoprenti Ω_t; e si ha, se σ è la somma delle lunghezze degli archi della successione detta, $\sigma \geq \Sigma \int_{\delta_r} s'(t)\, dt$. Si scelga arbitrariamente un numero positivo ε e si prenda, come successione di archi di C ricoprenti Ω_s, l'ultima successione considerata nel numero precedente (la quale è di misura $< 2\varepsilon$) e ad essa si aggiunga la successione dei vertici dei poligoni π là determinati. Si faccia poi la medesima costruzione sostituendo $\frac{\varepsilon}{2}$ ad ε; poi ancora per $\frac{\varepsilon}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^p}, \ldots$. La successione di archi di C corrispondente

a p avrà, per somma delle sue lunghezze, $\sigma_p = \frac{\varepsilon}{2^{p-1}}$; onde $\sigma_p \longrightarrow 0$ per $p \longrightarrow \infty$. Alla successione degli archi di C e a quella dei vertici dei poligoni π, ambedue relative a p, corrisponderà una successione $\delta_1^{(p)}, \delta_2^{(p)}, \ldots, \delta_r^{(p)}, \ldots$ di segmenti non sovrapponentisi di (a, b) (alcuni dei quali — quelli che corrispondono ai vertici dei π — possono ridursi a punti) ricoprenti Ω_t e formanti complessivamente un insieme misurabile di punti, che indicheremo con $E_t^{(p)}$. Sia E_t l'insieme dei punti comuni a tutti questi $E_t^{(p)}$. E_t è misurabile e contiene Ω_t; ed è $\sigma_p \geq \sum_r \int_{\delta_r^{(p)}} s'(t)\, dt \geq \int_{E_t} s'(t)\, dt$. Essendo $\sigma_p \longrightarrow 0$, è $\int_{E_t} s'(t)\, dt = 0$. Dunque *su* E_t, *e quindi anche su* Ω_t, *è quasi dappertutto* $s'(t) = 0$.

3. Ciò premesso, sia t un punto di (a, b) non appartenente all'insieme $\Omega_t + I$, dove I è l'insieme di misura nulla sul quale una almeno delle derivate $x'(t), y'(t), z'(t), s'(t)$ non esiste finita. Sia poi t_1 un altro punto qualsiasi di (a, b). Detti P e P_1 i punti corrispondenti di C, è $\{x(t_1) - x(t)\}^2 + \{y(t_1) - y(t)\}^2 + \{z(t_1) - z(t)\}^2 = \overline{PP_1}^2$. Dividendo (se non è $PP_1 = 0$) tutto per $(t_1 - t)^2$ e moltiplicando e dividendo il secondo membro per $\{s(t_1) - s(t)\}^2$, si ha al limite, per $t_1 \longrightarrow t$, tenendo conto di (3), $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2 = \{s'(t)\}^2$, uguaglianza valida per ogni t esterno a $\Omega_t + I$. Se poi t appartiene a Ω_t, pur essendo sempre esterno a I, si ha $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2 \leq \{s'(t)\}^2$, e qui vale ancora quasi dappertutto il segno di uguaglianza, perchè, quasi dappertutto, su Ω_t è $s'(t) = 0$. Concludendo: *Se la curva continua* C *è rettificabile, vale a dire se le* $x(t), y(t), z(t)$ *sono funzioni continue, a variazione limitata, vale quasi dappertutto la* $\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2 = \overline{ds}^2$.

4. L'uguaglianza precedente, tenendo conto della disuguaglianza

$$s_2 - s_1 \geq \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\, dt\,,$$

valida anch'essa in ogni caso, dà

$$s(t) \geq \int_a^t \sqrt{\overline{x'(t)}^2 + \overline{y'(t)}^2 + \overline{z'(t)}^2}\, dt\,.$$

E poichè nella disuguaglianza ricordata vale il segno di uguaglianza se, e solamente se, la $s(t)$ è assolutamente continua, altrettanto si dirà per la validità di (1). Ricordato, allora, che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la $s(t)$ sia assolutamente continua è che siano tali le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, si ritrova, per la validità della (1), esser necessario e sufficiente che le $x(t), y(t), z(t)$ siano assolutamente continue.

5. Ritornando al caso generale, del quale si sa solo che le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono continue e a variazione limitata, indichiamo con E l'insieme (necessariamente di misura nulla) nel quale una almeno delle derivate x', y', z' non esiste finita. Rinchiudiamo, nel senso stretto (fatta, al più, eccezione per a e b), i punti di E in una successione di intervalli, non sovrapponentisi, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r, \ldots$ (1), e definiamo in (a, b) la funzione $X(t)$ nel seguente modo: *fuori degli intervalli* δ, *e nelle loro estremità*, poniamo $X(t) = x(t)$ e in ciascun δ facciamo variare la $X(t)$ linearmente. La $X(t)$ risulta così continua e a variazione limitata [con una variazione totale non superiore a quella di $x(t)$] ed ha in ogni punto la derivata destra finita, la quale, fuori dei δ_r, coincide con $x'(t)$ (2). In modo analogo si definiscano le funzioni $Y(t), Z(t)$. Queste X, Y, Z, avendo le derivate destre sempre finite ed essendo a variazione limitata, sono anche assolutamente continue, e per la curva $\overline{C}$, che esse definiscono, vale dunque la (1). Si ha pertanto, indicando con Γ il complementare dell'insieme formato dai punti di tutti i δ_r, e con $S(b)$ la lunghezza della $\overline{C}$,

$$S(b) = \int_\Gamma \sqrt{|X'(t)|^2 + |Y'(t)|^2 + |Z'(t)|^2}\, dt +$$

$$+ \sum_r \int_{\delta_r} \sqrt{|X'(t)|^2 + |Y'(t)|^2 + |Z'(t)|^2}\, dt .$$

Ma in Γ è $X' = x'$, $Y' = y'$, $Z' = z'$, e su $\delta_r \equiv (\alpha_r, \beta_r)$ le X, Y, Z variano linearmente; si ha, perciò,

$$S(b) = \int_\Gamma \sqrt{\overline{x'(s)}^2 + \overline{y'(t)}^2 + \overline{z'(t)}^2}\, dt +$$

$$+ \sum_r \sqrt{|x(\beta_r) - x(\alpha_r)|^2 + |y(\beta_r) - y(\alpha_r)|^2 + |z(\beta_r) - z(\alpha_r)|^2} .$$

Al tendere di $\Sigma \delta_r$ a zero è

$$\int_\Gamma \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \longrightarrow \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

ed è anche $S(b) \longrightarrow s(b)$, perchè, da una parte, è sempre $S(b) < s(b)$, e, dall'altra, essendo $\overline{C}$ la curva limite della C, il minimo limite di $S(b)$ non può essere inferiore a $s(b)$. Esiste dunque il limite anche per $\sum_r \sqrt{\ldots}$,

(1) Dunque ogni punto di E, fatta eccezione al più per a e b, è *interno* ad un intervallo δ, oppure è l'estremo comune di due δ contigui.

(2) Cfr. il n. 5 della mia Nota *Successioni di curve e derivazione per serie*, Nota II (questi Rendiconti, gennaio 1916).

e questo limite, che indicheremo con $l(b)$, è indipendente dal modo nel quale sono stati scelti i δ_r (purchè rinchiudano sempre, nel senso stretto, l'insieme E) ed anche da quello nel quale si fa tendere a zero $\Sigma\delta_r$; e si ha, poichè a b si può sostituire un t qualunque di (a, b),

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\overline{x'(t)}^2 + \overline{y'(t)}^2 + \overline{z'(t)}^2}\, dt + l(t),$$

dove $l(t)$ *(che può chiamarsi la lunghezza della parte di* C *relativa all'insieme* E_t*) è il limite della somma delle corde di* C *corrispondenti ad una successione qualsiasi d'intervalli di* (a, b) *che ricoprono, nel senso stretto, l'insieme* E_t *dei punti di* (a, t) *ove una almeno delle* x', y', z' *non esiste finita; ed il limite è ottenuto facendo tendere a zero, in modo del tutto arbitrario, la somma degli intervalli considerati.*

6. Se la curva continua e rettificabile C è definita dall'equazione $y = f(x)$, considerata per tutti gli x di (a, b), la formula precedente diventa

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \overline{f'(x)}^2} + l(x),$$

e $l(x)$ risulta anche uguale alla variazione totale della $f(x)$ nell'insieme E_x dei punti di (a, x) nei quali la $f'(x)$ non esiste finita: vale a dire, al limite di $\Sigma|f(\beta_r) - f(\alpha_r)|$, per $\Sigma(\beta_r - \alpha_r) \longrightarrow 0$, dove gli (α_r, β_r) costituiscono una successione d'intervalli non sovrapponentisi, ricoprenti, nel senso stretto, l'insieme E_x (1).

Consideriamo, come esempio, la curva continua definita dalla seguente funzione: detto E il noto insieme di Cantor, formato coi punti dell'intervallo $(0, 1)$ di ascissa $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots$, dove i numeratori a non possono prendere che i valori 0 e 2, poniamo

$$f\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots\right);$$

poniamo, poi, che la $f(x)$ resti costante negli intervalli contigui a E. L'insieme E è perfetto e di misura nulla, e la funzione $f(x)$ (che è quella di cui si è servito il Cantor per dimostrare che E ha la potenza del continuo, e della quale è facile dare una espressione analitica completa) è continua, non decrescente, ed assume negli estremi di $(0, 1)$ i valori 0 e 1; inoltre, essendo costante in ogni intervallo contiguo ad E, essa ha quasi

(1) Basta, infatti, osservare che è

$$|f(\beta_r) - f(\alpha_r)| < \sqrt{(\beta_r - \alpha_r)^2 + |f(\beta_r) - f(\alpha_r)|^2} \leq (\beta_r - \alpha_r) + |f(\beta_r) - f(\alpha_r)|.$$

dappertutto derivata nulla. La sua lunghezza è data dalla formula sopra scritta. E si ha facilmente $l(1) = 1$, e quindi $s(1) = 2$.

7. *Le cose qui dette per le curve continue rettificabili valgono tutte* (come si vede aggiungendo ai ragionamenti fatti qualche facile riflessione) (1) *anche per le curve semplicemente rettificabili, definite cioè dalle equazioni* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $(a \leq t \leq b)$, *o dall'altra* $y = f(x)$ *in* $(a \leq x \leq b)$, *dove le* $x(t), y(t), z(t), f(x)$ *sono funzioni a variazione limitata* (*non necessariamente continue*).

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari di integrali riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Intorno ad alcuni modi di calcolare l'esperienza di Clermont-Desormes.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

Per ottenere dall'esperienza di Clément e Desormes l'espressione del rapporto $k = c_p/c_v$ dei calori specifici d'un gaz a pressione costante ed a volume costante, si seguono di solito due metodi: uno, dovuto, credo, al Poisson, che suppone la conoscenza della legge delle variazioni adiabatiche di stato e quindi quelle del primo principio di termodinamica e del calcolo non elementare che serve per ottenere tale legge; l'altro, seguìto in quasi tutti i trattati di Fisica, che non richiede tali conoscenze, ma che, sebbene elementare, riesce più complicato e più difficile da seguire e a rammentare.

In una Nota precedente (2) ho indicato un metodo di calcolo che, sebbene forse non differisca essenzialmente da quest'ultimo, mi pare più breve e più facile e diretto, ma che però non ha ottenuto l'approvazione del prof. Guido Grassi, il quale trova (3) che ho equivocato, che il mio calcolo è inesatto e che solo, pare, per un caso fortunato sono giunto alla solita espressione del suddetto rapporto, pur basandomi sopra un equivoco ed usando formule inesatte.

Credo necessario ripetere, brevemente, ancora una volta, il mio ragionamento, completandolo con l'aggiunta di qualche schiarimento.

(1) Occorrerà però qualche avvertenza nella definizione di $l(t)$ e di $l(x)$.

(2) Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1914.

(3) Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1915.

Si abbia 1 gr. di un gaz nelle condizioni p, v, T, e lo si riscaldi di 1° a volume costante, ciò che richiederà una quantità di calore c_v e produrrà un aumento di pressione p/T [poichè $pv = \mathrm{RT}$, $xv = \mathrm{R(T+1)}$]; dopo lo si lasci dilatare molto rapidamente, finchè la sua pressione sia ridivenuta p, ciò che produrrà un abbassamento di temperatura che indico con $\delta\mathrm{T}$, un aumento di volume $v(1-\delta\mathrm{T})/\mathrm{T}$ [poichè $pv = \mathrm{RT}$, $px = \mathrm{R(T+1-\delta T)}$] ed il corrispondente lavoro che, senza grande errore, potrà esser considerato come effettuato a pressione costante, sia perchè la variazione della pressione interna è piccolissima, sia perchè quella esterna, che viene superata, è realmente costante.

Allo stesso stato finale del gaz si potrà giungere scaldando il gaz di $1° - \delta\mathrm{T}$ a pressione costante, ciò che richiederà una quantità di calore $c_p(1-\delta\mathrm{T})$ ed avrà prodotto lo stesso aumento di volume e, per le ragioni addotte, lo stesso lavoro.

Le due quantità di calore impiegato nei due casi, e producenti effetti uguali, saranno dunque uguali, e si avrà

$$(1) \qquad c_p(1-\delta\mathrm{T}) = c_v \qquad k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{1}{1-\delta\mathrm{T}}.$$

Il valore del raffreddamento $\delta\mathrm{T}$, prodotto dalla rapida dilatazione, è dato dall'esperienza di Clément e Desormes.

Se $p+h$ è la pressione iniziale del gaz nel gran pallone, p quella esterna e quindi quella dello stesso gaz dopo aperto il grosso rubinetto (che viene subito richiuso), e $p+h'$ quella finale, quando il raffreddamento prodotto dalla dilatazione si è dissipato, questo, che è indicato da h', sarà espresso in gradi da $\mathrm{T}h'/(p+h')$ [perchè $pv = \mathrm{R(T-\delta T)}$, $(p+h')v = \mathrm{RT}$], essendo h la dilatazione che lo ha prodotto.

Siccome, nel caso attuale, $h = p/\mathrm{T}$, e quindi $p/\mathrm{T}h = 1$ ed $1/\mathrm{T} = h/p$, e siccome la temperatura iniziale del gaz che si espande è $\mathrm{T}+1$, sarà

$$\delta\mathrm{T} = \frac{h'(\mathrm{T}+1)}{p+h'}\frac{p}{\mathrm{T}h} = \frac{h'}{h}\left(\frac{1+h/p}{1+h'/p}\right)$$

e quindi sarà

$$(2) \qquad k = \frac{1}{1-h'(1+h/p)\,h(1+h'/p)} = \frac{h}{h-h'}\left(1+\frac{h'}{p}\right);$$

ossia, poichè h' è minore di h che è molto piccolo rispetto a p, sarà

$$k = \frac{h}{h-h'}.$$

L'egregio critico m'insegna che ho equivocato nel ritenere che siano uguali le quantità di calore spese nei due casi, perchè sono diversi i lavori dell'espansione adiabatica ed a pressione costante; a me pare, invece, che equivochi egli stesso e che il suo equivoco sia, in certo modo, poliedrico, perchè ha molte faccie.

Anzitutto, come egli stesso riconosce, la differenza fra i due lavori è « piccolissima » nel caso, da me considerato, del riscaldamento di 1°; e ne segue dunque che, in questo caso, anche la sua critica ha un valore piccolissimo.

Inoltre da ciò si può dedurre, senza grande sforzo d'immaginazione o di calcolo, che basterebbe considerare un riscaldamento minore perchè la differenza dei due lavori ed il valore della critica venissero ancor più ridotti, e che, considerando un riscaldamento infinitesimo (che non ho scelto anche perchè le formule riescono meno semplici), la suddetta differenza ed il suddetto valore diverrebbero nulli o, più esattamente, infinitesimi di 2° ordine.

Il metodo seguìto dall'egregio critico per dimostrare l'inesattezza della suddetta formula, il supporla cioè applicata in condizioni più generali di quelle nelle quali fu ottenuta (e che sono poi quelle dell'esperienza alla quale si riferisce), non mi pare nè corretto nè persuasivo; qualsiasi ragionamento e qualsiasi formula possono essere in tal modo dimostrati inesatti.

Con altrettanta ragione l'egregio critico potrebbe biasimare l'uso delle parti proporzionali delle tavole logaritmiche, dimostrando analiticamente che non v'è proporzionalità fra i numeri ed i loro logaritmi, e facendo osservare che $10/1 = 10$, mentre $\log 10 / \log 1 = 1/0 = \infty$.

È anche da notare che, essendo stato ottenuto, col ragionamento criticato, non un « *risultato numerico* abbastanza esatto », come sottolinea il critico, ma la formula solita, il ragionamento, letto al rovescio, giustifica la premessa, cioè l'ipotesi criticata.

Ma perfino la base stessa della critica è priva di fondamento sicuro.

L'egregio critico, che non si occupa delle condizioni dell'esperienza, suppone che il lavoro dell'espansione adiabatica sia quello teorico che si calcola facendo uso della formula di Poisson, che viene dedotta dall'equazione del primo principio di termodinamica, $Rdq = c_p\,pdv + c_v\,vdp$, supponendo che la pressione del gaz sia sempre uguale a quella esterna (nel qual caso non v'è ambiguità nel significato e nel valore di p); supponendo dunque che l'espansione avvenga reversibilmente.

Ora, tale non è il caso nell'esperienza di Clément e Desormes, nella quale l'espansione o la compressione si producono di certo irreversibilmente; quindi, siccome il lavoro teorico reversibile, prodotto da una data variazione di pressione, è massimo, ne segue che quello reale sarà minore, e la differenza fra questo lavoro e quello a pressione costante sarà ancor minore di quella teorica, riconosciuta piccolissima dall'egregio critico.

Questi m'insegna anche come deve essere eseguito con esattezza il calcolo degli effetti dei due riscaldamenti; ma non credo che m'insegni bene. Egli non tiene nessun conto dell'esperienza a cui il calcolo si riferisce, e, per di più, fa sparire l'incognita k che si vuole determinare e che comparirebbe nell'espressione del lavoro adiabatico, perchè a questo sostituisce l'equivalente termico.

Così egli ottiene la differenza $c_p - c_v$ dei calori specifici, mentre se ne cerca il rapporto; e l'ottiene espressa in funzione di quantità che l'esperienza di Clément e Desormes non dà, con una formula nella quale l'espansione adiabatica non entra affatto.

Tutto ciò non turba affatto l'egregio critico, perchè autore di questo ragionamento dovrei esser io, se non equivocassi; ed egli crede d'aver dimostrato « ad esuberanza » che il ragionamento criticato, equivocando è inesatto, non equivocando è inutile.

Ora, sebbene, tenendo conto delle condizioni delle esperienze, io abbia creduto e creda opportuno di ottenere il valore di k considerando gli effetti di due piccoli riscaldamenti del gaz a volume costante e a pressione costante, i quali per la loro piccolezza rendono lecite notevoli semplificazioni, ciò non esclude che si possa ottenere il suddetto valore, anche considerando gli effetti di due riscaldamenti non piccoli, e rinunziando alle semplificazioni.

Riscaldando 1 gr. del gaz di t gradi a volume costante e lasciandolo dilatare adiabaticamente (e, supponiamo, reversibilmente), ciò che produrrà un raffreddameato δt; oppure riscaldando il gaz di $t - \delta t$ gradi a pressione costante, il gaz in entrambi i casi sarà giunto allo stesso stato finale, ed il calore da esso acquistato sarà lo stesso, uguale al calore impiegato, diminuito del lavoro ottenuto. Si avrà dunque

$$c_v . t - \mathrm{L}_q = c_p (t - \delta t) - \mathrm{L}_p ,$$

indicando con L_q ed L_p i lavori adiabatico ed a pressione costante. Siccome l'aumento di volume del gaz è $v(t - \delta t)/\mathrm{T}$, sarà

$$\mathrm{L}_p = pv(t - \delta t)/\mathrm{T} = \mathrm{R}(t - \delta t) = (c_p - c_v)(t - \delta t) ,$$

e quindi si ha

$$c_v . t - \mathrm{L}_q = c_p (t - \delta t) - (c_p - c_v)(t - \delta t) .$$

ossia:

$$c_v \delta t = \mathrm{L}_q .$$

Questa equazione esprime che il calore perduto dal gaz per effetto della espansione adiabatica, espresso in ergs, è uguale al lavoro prodotto da essa; e tralasciando il calcolo precedente si può prenderla come punto di partenza di un modo molto diretto per calcolare k, esattamente o con varî gradi di approssimazione.

Riferendosi all'esperienza di Clément e Desormes, siano $p_1\ v_1\ T_1$, $p_2\ v_2\ T_2$, $p_3\ v_3\ T_3$ le condizioni del gaz del gran pallone nelle tre fasi dell'esperienza, cioè inizialmente, appena aperto e subito richiuso il grosso rubinetto, e quando il raffreddamento prodotto dalla espansione si è dissipato. Sarà dunque p_2 la pressione esterna, $p_1 = p_2 + h$, $p_3 = p_2 + h'$, essendo h ed h' le pressioni indicate dal manometro ad aria libera; ed inoltre sarà $T_1 = T_3 = T$ la temperatura ambiente, e $T_2 = T - \delta T$, essendo δT il raffreddamento suddetto. Conviene notare che, essendo il volume del gaz, nella 2ª e 3ª fase, lo stesso, sarà $p_2/p_3 = T_2/T_3$.

Il lavoro prodotto dalla dilatazione adiabatica sarà

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = \frac{1}{k}\int_{p_2}^{p_1} v\,dp = \frac{p_2^{1/k}\,v_2}{k}\int_{p_2}^{p_1} p^{-1/k}\,dp = \frac{p_2\,v_2}{k-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-1/k} - 1\right];$$

e tenendo conto che $RT_2 = p_2\,v_2$ e che $R = c_p - c_v$, si avrà, per effetto della suddetta eguaglianza,

$$c_v\,\delta T = c_v\,T_2\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-1/k} - 1\right].$$

Ora, come si è visto, $\delta T = h'\,T_3/(p + h') = (p_3 - p_2)\,T_3/p_3$; si avrà dunque

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-1/k} = 1 + \frac{p_3 - p_2}{p_3}\frac{T_3}{T_2} = 1 + \frac{p_3 - p_2}{p_2} = \frac{p_3}{p_2},$$

ossia

$$(3)\qquad \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{k}, \quad k = \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log p_1 - \log p_3},$$

lo stesso valore che si ottiene col calcolo di Poisson e che, siccome le pressioni sono poco differenti, può ridursi a $k = h/(h - h')$.

Siccome la piccolezza della variazione adiabatica di pressione consente questa semplificazione della formula, può tornare comodo di tener conto di questa piccolezza, fin da principio, nel calcolo, che può essere in tal modo molto semplificato, del lavoro adiabatico.

Così, nel caso in cui la variazione di pressione sia tanto piccola da potersi trascurare, la suddetta uguaglianza ci dà

$$c_v\,\delta T = p(v - v');$$

e siccome dalla 1ª e 3ª fase, a temperature uguali, dell'esperienza, si ha

$$(p + h)\,v = (p + h')\,v', \text{ ossia } v - v' = v(h - h')/(p + h'),$$

e $\delta T = h'\,T/(p + h')$, si ha

$$c_v\,T\,\frac{h'}{p + h'} = \frac{pv(h - h')}{p + h'};$$

e, poichè $pv = RT$, $R = (c_p - c_v)$, si ottiene

$$(4) \qquad k - 1 = \frac{h'}{h - h'} \qquad k = \frac{h}{h - h'}.$$

Questo modo di ottenere il valore di k è ancor più semplice di quello esposto nella Nota precedente ed in principio della presente, ma suppone che sia già nota l'equivalenza fra calore e lavoro. Siccome l'ipotesi su cui si basano è approssimativa, le formule (2) e (4) sono approssimativamente, non rigorosamente, uguali.

Un modo di calcolare il lavoro adiabatico, che, sebbene elementare, è più esatto del precedente, si ha supponendo che in $\int pdv$ la pressione sia bensì costante, ma uguale alla media del valore iniziale e di quello finale, e similmente che in $\int vdp/k$ sia costante ed uguale al valor medio il volume, ciò che equivale a sostituire la corda all'arco nell'area che rappresenta il lavoro e che è limitata dall'arco di curva adiabatica ($pv^{\kappa} = \text{cost}$) e dalle due ordinate estreme.

Così, essendo $p + h$ e p i valori estremi della pressione, e v, v' quelli corrispondenti del volume, esso lavoro (tenendo conto del suddetto valore di $v - v'$) potrà essere espresso da

$$(p + \tfrac{1}{2}h)\frac{h - h'}{p + h'}v, \quad \text{oppure da} \quad \left(v + \tfrac{1}{2}\frac{h - h'}{p + h'}v\right)\frac{h}{k}.$$

Uguagliando queste due espressioni, si ottiene

$$k = \frac{h}{h - h'}\frac{1 + (h + h')/2p}{1 + h/2p},$$

ossia, con molta approssimazione,

$$(5) \qquad k = \frac{h}{h - h'}\left(1 + \frac{h'}{2p} - \frac{hh'}{hp^2} + \cdots\right)$$

dove appare il piccolo errore che si commette usando la solita formula.

Se invece si uguaglia a $c_v \delta t$ ossia a $c_v h' T/(p + h')$, la prima delle suddette espressioni del lavoro adiabatico, si ottiene

$$c_v \frac{h' T}{p + h'} = (p + \tfrac{1}{2}h)\frac{v(h - h')}{p + h'} \quad . \quad \frac{h'}{h - h'} = \frac{1}{c_v}\frac{v}{T}(p + \tfrac{1}{2}h),$$

ossia

$$(6) \qquad \frac{R}{c_v}\left(1 + \frac{h}{2p}\right) = \frac{h'}{h - h'} \qquad k = 1 + \frac{h'}{h - h'}\frac{1}{1 + h/2p}.$$

Uguagliando invece $c_v \delta T$ al secondo dei suddetti valori, si ha

$$c_v \frac{h'T}{p+h'} = v\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{h-h'}{p+h'}\right)\frac{h}{k} \quad \frac{h'}{h} = \left(1+\frac{h'}{p}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{h-h'}{p+h'}\right)\frac{k-1}{k}$$

relazione la quale, sebbene d'apparenza più complicata, non differisce essenzialmente dalle precedenti.

È difficile stabilire quale fra i precedenti valori corrisponda meglio alle condizioni dell'esperienza.

Ai calcoli precedenti, come pure a quello di Poisson, si possono fare varie obbiezioni che rendono assai dubbio il grado d'esattezza teorica di cui essi sono suscettibili.

In primo luogo, essi si riferiscono ad una massa determinata di gaz, quale potrebbe aversi producendo la variazione adiabatica di volume mediante uno stantuffo; ma con questa disposizione lo stantuffo sottrarrebbe una parte non trascurabile del calore prodotto dalla compressione, oppure riscalderebbe il gaz che, dilatandosi, si raffredda; e perciò (suppongo) Kohlrausch (Pogg. Ann., 136), che appunto esercitava nel gaz la rarefazione mediante un colpo di stantuffo, ottenne per k valori assai minori del vero.

Se invece, come di solito, si lascia che il gaz, un po' compresso, si espanda nell'atmosfera, o che, un po' rarefatto, riceva aria dall'esterno, la massa del gaz, e quindi la variazione della quantità di calore che essa possiede, non sono ben determinate, poichè una parte del gaz dell'esperienza sfugge, oppure ad esso si aggiunge aria esterna.

Inoltre l'irreversibilità della variazione rapida di pressione lascia dubbio quale sia il valore reale del lavoro corrispondente, e solo può dirsi che quello che corrisponde alla variazione reversibile, e che conduce alla formula logaritmica (3), è certamente troppo grande, e che quello a pressione costante uguale a quella esterna, e che conduce alla formula (4), è minore del vero; forse la media dei due valori è preferibile ad entrambi, che del resto sono poco differenti, perchè h/p è, di solito, molto piccolo.

Una obbiezione, che pone in dubbio la base stessa dei calcoli suddetti, sta in ciò, che non è punto evidente che nel passaggo di un gaz da un ambiente in un altro (o nell'atmosfera), ove la pressione sia minore, si abbia produzione di lavoro, ed anche, ammesso ciò, che esso sia espresso da $\int p dv$ e non da $\int h dv$. Basti il notare che l'interposizione di un tampone poroso (esperienza di Joule e Thomson) rende nullo l'effetto termico, ciò che prova che non vi è il lavoro equivalente.

Il primo principio di termodinamica, che è certamente e sempre soddisfatto, stabilisce che il lavoro prodotto o assorbito ed il calore scomparso o apparso sono eguali, ma non quale sia esso lavoro; ed anche il secondo principio, stabilendo che la formula di Poisson vale quando l'entropia è co-

stante, ossia quando $c_v dT + dl = 0$, non dà alcun indizio sul valore dei singoli termini.

Il valore dell'effetto termico potrà essere ottenuto solo mediante la teoria cinetica dei gaz, considerando che, per effetto della differenza di pressione, e quindi di densità del gaz nei due ambienti, si produce un moto statistico (non già prodotto dall'azione di forze) del gaz da un ambiente verso l'altro, e che, per effetto degli urti nel recipiente ove la pressione è maggiore, le molecole della corrente subiscono un aumento di velocità nella direzione del moto; si avrà così un trasporto di calore nel senso del moto.

Ne seguirebbe, dunque, che finora il calcolo dell'esperienza di Clément e Desormes è affatto empirico, ammissibile solo perchè dà valori concordi con quelli ottenuti dagli altri metodi.

Alla fine della Nota citata ho indicato molto brevemente ed affrettatamente come nell'esperienza di Clément e Desormes si abbia un mezzo elementare molto semplice per dimostrare la trasformazione del calore in lavoro e viceversa, e per dedurne l'equivalente meccanico della caloria. (Con vantaggio della chiarezza e con una piccola diminuzione nell'esattezza, la compressione o rarefazione potrebbe esser prodotta mediante uno stantuffo).

Così, per es., in una esperienza nella quale fu $h = 14$ cm. d'acqua, $h' = 4$ cm. alla temperatura di 27°, ossia 300 assoluti, ed alla pressione esterna di 1000 cm., il lavoro della dilatazione misurato in Kgr. cm. (ossia prendendo come unità di forza il Kgr., come unità di lunghezza il cm., come unità di pressione il Kgr. per cm^2) era $v(h - h') = v\,(0{,}014 - 0{,}004) = = v/100$ Kgr. cm., ossia $v \cdot 10^{-4}$ chilogrammetri, mentre il calore perduto dal gaz nel produrre la dilatazione era $vD \cdot c_v \cdot \delta T$, ossia $vD\, c_v\, h'T/p$, cioè $v \cdot 0{,}00120 \cdot 0{,}17 \cdot 300 \cdot 0{,}004$ gr. calorie approssimativamente, cioè $0{,}25 \cdot 10^{-6}$ Kgr. calorie e l'equivalente meccanico risulta $10^{-4} / 0{,}25 \cdot 10^{-6}$ ossia 400 Kgrm.

L'egregio critico fa ancora notare il supposto equivoco del quale ha già riconosciuto la piccolissima importanza; poi, continuando, scrive: « Volendo semplificare il calcolo della pressione adiabatica, l'A. arriva a porre $pdv = -vdp$; ora questa condizione equivale a supporre che la trasformazione sia isotermica e non adiabatica. Se, ciononostante, l'A. giunge infine a scrivere esattamente l'ultima formula che dà l'equivalente meccanico, ciò dipende dall'aver egli supposto che nell'esperienza di Clément e Desormes il valore di k sia dato esattamente dal rapporto fra le differenze di pressione osservate, mentre quello non è che una espressione approssimata; l'espressione esatta è quella in funzione dei logaritmi delle pressioni, che l'A. stesso ha ricordato (ricavato) in principio della sua Nota ».

Risulta, da ciò, che l'egregio critico ritiene che si possa dedurre una relazione esatta da un'equazione erronea nella quale uno dei membri è 1,4 volte (1,67 volte se il gaz è monoatomico) maggiore dell'altro.

Astenendomi dal giudicare questa sua opinione, mi preme notare che essa non trova nessun appoggio nel ragionamento criticato. Dalla suddetta equazione non venne dedotta nessuna relazione esatta (e neppure nessuna erronea), ed essa non venne dedotta con nessun ragionamento. Essa, che è contenuta in un brevissimo inciso « (cioè $pdv = -vdp$) » è dovuta unicamente al seguente errore di trascrizione, sfuggito appunto perchè non se ne fece uso.

Ponendo, nella relazione $p(v - v') = v(h - h')$, dv invece di $v - v'$, sbadatamente, parve naturale di porre $h - h' = dh$ ossia $= dp$. Invece, siccome quando la pressione passa da $p + h$ a p, il volume varia da v a v', se $v - v' = dv$ sarà $h = dp$. (Inoltre h ed h' sono due diversi dp: totale il primo, causato dalla variazione del volume e della temperatura; parziale l'altro, causato dalla variazione della sola temperatura; e la loro differenza non potrebbe esser rappresentata da un solo simbolo).

Quindi, siccome dalla relazione $k = h/(h - h')$, esatta nel caso suddetto di variazioni infinitesime, si ricava $h - h' = kh = kdp$, la relazione $p(v - v') = v(h - h')$ avrebbe dovuto esser trascritta $pdv = -vdp/k$.

Il valore esatto dell'equivalente meccanico è stato dedotto invece dalla espressione approssimata del lavoro $v(h - h')$, che rimane quindi (nelle condizioni dell'esperienza) dimostrata.

Chimica. — *Ricerche sulle combinazioni subalogenate di alcuni elementi.* V: *Sul cosiddetto sottocloruro di bismuto.* Nota di L. Marino e R. Becarelli, presentata dal Socio R. Nasini.

Riferiamo in questa Nota i risultati delle ricerche da noi proseguite sul sistema bismuto-cloro, in analogia con quanto abbiamo già fatto a proposito dei miscugli di bismuto-iodio e di bismuto-bromo (1).

Presentandosi anche qui le stesse cause di errore per quelli già ricordati, fu necessario servirsi dei soliti tubi e operare sempre su 50 gr. di miscuglio, che riscaldavamo nel solito dispositivo. Data l'avidità con la quale il tricloruro attira l'acqua, non trovammo conveniente di preparare sinteticamente, meno che per le concentrazioni a basso tenore in cloro, i nostri miscugli negli stessi tubi nei quali doveva più tardi essere eseguita la fusione. Si finisce sempre coll'introdurre qualche traccia di umidità che non è più cosa facile eliminare. È vero che le ulteriori esperienze ci hanno dimostrato non essere i risultati termici influenzati da piccole quantità di ossicloruro; ma queste nel caso nostro, dovevano essere assolutamente evitate, sia perchè occorreva stabilire la natura della sostanza solida che si genera intorno a

(1) Ved. Rend. R. Acc. Lincei, XXI [5], pag. 695; ibid. XXIV [5], pag. 625; ibid. XXV [5] pag. 105 e 171. Per quanto riguarda il contributo sperimentale portato da ciascuno di noi nell'esecuzione del presente lavoro, vedere la Nota II in questi Rendiconti, XXIV [5], pag. 625.

300°, sia perchè le tracce d'acqua, pur reagendo per dare ossicloruro, finiscono sempre col provocare la rottura dei tubi. Preferimmo perciò preparare tutti i nostri miscugli per aggiunta di bismuto al tricloruro anidro. Questo proveniva dalla ditta Kahlbaum o dalla ditta Erba, ed era sempre risublimato nel vuoto entro tubi di vetro a pareti spesse e del diametro di circa 3 cm., strozzati a metà in modo da lasciare un foro di circa 1 cm. Finita la sublimazione, si chiudevano alla lampada le estremità del tratto di tubo in cui trovavasi il prodotto anidro il quale rimaneva così conservato fino al momento di adoprarlo. La miscela fusa era mantenuta varie ore a 370° e 380° prima di prendere la curva di raffreddamento, la quale veniva sempre controllata per quattro o cinque volte, rifondendo la massa e rilasciandola per altre due ore o tre all'anzidetta temperatura. Tanto le curve di raffreddamento quanto quelle di riscaldamento furono ripetute varie volte su nuovi miscugli operando nello stesso modo; e i risultati ottenuti furono sempre gli stessi. La velocità di raffreddamento era di circa 1°,5 per minuto primo. La coppia veniva sovente controllata prendendo come punti fissi delle scale, oltre lo zero e il cento, i punti di fusione dello stagno (232°) e zinco (419°). Il bismuto adoperato fonde allora a 272°. Le letture del galvanometro si facevano ogni minuto.

Riportiamo nella seguente tabella i risultati ottenuti per una delle numerose serie di miscugli impiegati. Ci dispensiamo dal riportare altre serie di dati perchè essi differiscono assai poco da questi e quindi nulla aggiungerebbero alle conclusioni che da essi potremmo ritrarre.

Tabella 1.

% in grammi di		% in atomi di		Temperatura alla quale la coppia comincia a risalire	Temperatura alla quale è risalita la coppia: 1° arresto	2° arresto
Bi	$BiCl_3$	Bi	Cl			
100	0	100	0		272°	—
95	5	90.8	9.2	244°.5	264	—
90	10	82.9	18.1	244	264	—
80	20	70.1	29.9	240	261	190
70	30	60.6	39.4	247	260	178
60	40	51 9	48.1	238	256	182
50	50	45 4	54.6	240	256	190
40	60	40 0	60.0	237	255	190
30	70	35.3	64.7	239	249	190
20	80	31.5	68.5	233	237	197
10	90	28.0	72.0	—	212	—
0	100	24.6	75.4	—	224	—

A giudicare dai dati qui riportati e da quelli numerosissimi ottenuti in analoghe esperienze, si dovrebbe concludere che si ha da fare con un sistema di due strati conforme a quanto risulta dalle antiche ricerche di Weber [1] nonchè da quelle più recenti di Eggink [2]. Questo però non si verifica se non al disopra di una certa temperatura, giacchè, come già osservammo nella nostra Nota sul sistema bismuto-bromo [3], al disotto di 315° da uno degli strati liquidi si origina una massa solida che è formata, come dimostreremo meglio, da cristalli misti. Quando noi facciamo solidificare i singoli miscugli fusi, vediamo che, per determinati limiti di concentrazione, come per il caso del bromo, la massa solida apparentemente omogenea si divide con grande facilità in due parti: una superiore nera, assai più igroscopica della corrispondente massa bromurata, tessuta di una grande quantità di bellissimi cristalli aghiformi neri; ed una inferiore, assai compatta all'interno, di splendore metallico, ben cristallizzata e coperta all'esterno da una pellicola nera. Le quantità assolute di queste due masse separabili variano col variare della concentrazione dei varii miscugli. Anche qui il blocco metallico è sensibilissimo alla luce, e, in poco tempo, non solo perde la sua lucentezza ma diviene prima iridiscente, poi grigio-azzurro per la presenza del tricloruro che tiene disciolto.

Lo strato superiore nero, come per il prodotto bromurato non contiene una sostanza sola; difatti, riscaldando a 230° nei soliti tubi muniti di strozzatura la massa nera ottenuta da due miscugli precedentemente fusi [4], uno al 46,06 % e l'altro al 24,85 % di $BiCl_3$, passa attraverso il setto una sostanza che, quando è solida, costituisce una massa nera igroscopicissima, mentre rimane un reticolato cristallino il quale fonde in un intervallo di temperatura superiore a 270°. Il blocco metallico fonde fra 230° e 270°. Quale sia il contenuto in cloro delle singole masse separate, determinato con un procedimento analogo a quello usato per il bromo, si vede chiaramente nell'ultima colonna della seguente

(1) Pogg. Ann. *107*, 597.

(2) Zeit. für Phys. chem. *64* (1908) 490.

(3) Rend. R. Acc. Lincei *25* [5] pag. 105 e 171.

(4) Ogniqualvolta diciamo di aver operato su miscugli fusi, intendiamo che essi furono preparati con tutte le precauzioni precedentemente descritte.

Tabella II.

Composizione del miscuglio	Sostanza fusa a 230° gr.	Sostanza fusa fra 230°-270° gr	Sostanza non fusa a 270°	Sostanza analizzata gr.	$AgNO_3$ $^N/_{10}$ consumato	% in cloro gr.
46.06 % di $BiCl_3$	26.44 %			0.3576	21.2	22.23
		36.56 %		0.7800	0.7	0.33
			37.00 %	0.4521	18.1	15 02
24.85 % di $BiCl_3$	4.40 %			0 3586	23 8	24.91
		67.5 %		0.5905	0 5	0.32
			28.1 %	0 4599	27.4	22 33

Per le ragioni già dette a proposito dei miscugli di bismuto e bromo, i valori riportati non sono da considerarsi come assoluti. Anche qui infatti, se si ripete sulla massa cristallina già ottenuta una nuova separazione su rete di nichel e si analizzano i cristalli, i valori si avvicinano sicuramente di più al contenuto reale in cloro (per la stessa sostanza cristallina separata dal miscuglio al 46,6 % di $BiCl_3$ riportata nella tabella, invece di 15,02 si trova 15,71 % in cloro).

Vediamo ora per qual via si può giungere a stabilire la natura di questi cristalli. Se consideriamo l'andamento delle curve di raffreddamento quali risultano dalla tabella 1ª a pag. 222 e dalla figura 1ª, ben poco a questo riguardo si può da esse dedurre. Infatti tutte le curve di raffreddamento dei miscugli dal 5 all'80 % di $BiCl_3$ non sempre mostrano, per una temperatura superiore ai 270° gradi, arresti o cambiamenti di direzione, ma discendono regolarmente fino a 235° e anche 230°. A questa temperatura si ha un notevole sviluppo di calore che, come per l'analogo caso del sistema bismuto-bromo, fa risalire bruscamente la coppia anche di circa 20°. Si origina così anche in questo sistema un fenomeno che ha tutto l'aspetto di una soprafusione. Però, per le ragioni già allora ricordate, esso non deve interpretarsi come un sopraraffreddamento.

Anche introducendo, a diverse temperature superiori a quella per la quale notasi il fenomeno, un po' di sostanza solida, corrispondente ai tre stati di diverso punto di fusione, ottenuti per precedente riscaldamento dei miscugli alla stessa concentrazione, esso permane sempre. Per far cadere i germi di cristallizzazione senza dover riaprire i tubi, essi venivano prima introdotti in una rigonfiatura laterale del tubicino adduttore, e fatto il vuoto si

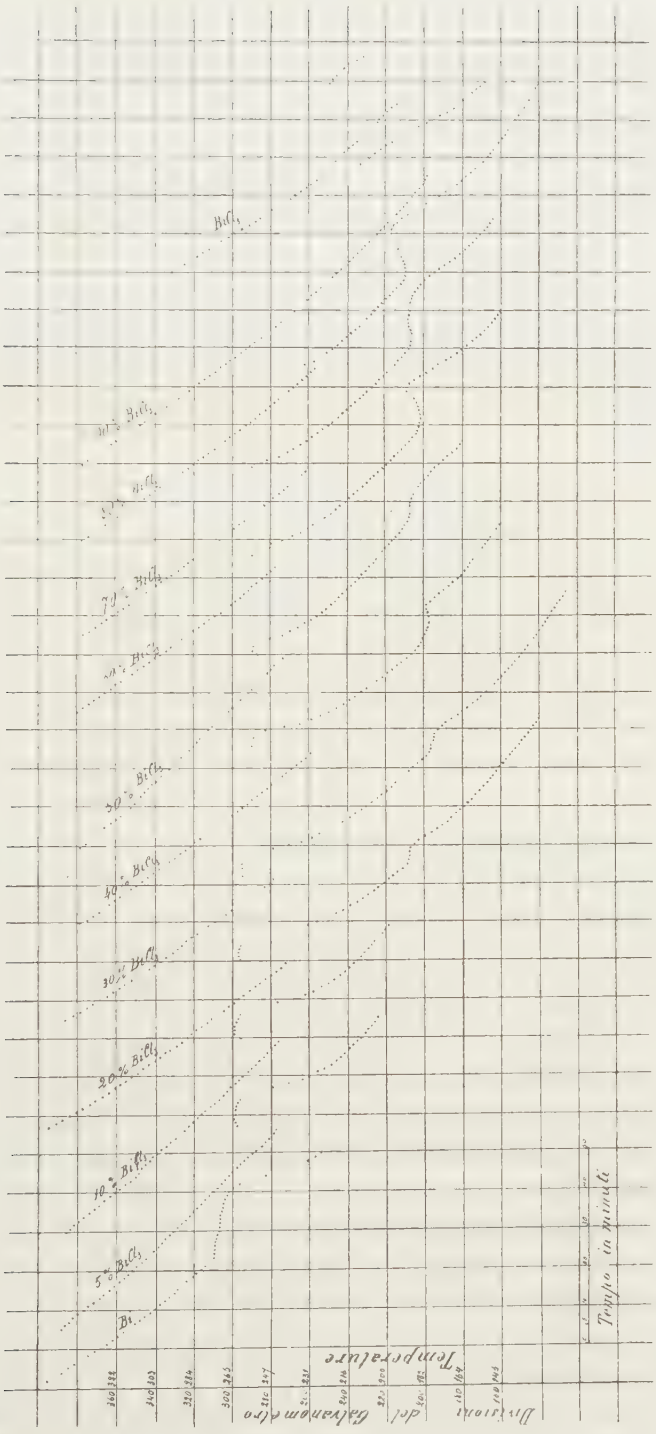

Fig. 1. — Curve di raffreddamento. Sistema Bi-Bi Cl_3

strozzava il capillare nel modo solito alla pompa. Raggiunta nel raffreddamento la temperatura voluta, bastava muovere il dispositivo perchè i germi venissero a contatto della massa. Per quanto allora si agitasse fortemente, non si ottenne alcun cambiamento. Perciò a noi sembra che anche qui il fenomeno deve riguardarsi quale vera e propria trasformazione in solido come meglio resta confermato dalle ulteriori esperienze.

Del resto, che non si tratta di sopraraffreddamento lo proverebbe anche la regolarità con cui esso si manifesta. Lo troviamo, ad es., sempre evidentissimo per le concentrazioni inferiori al 40 % di $BiCl_3$, ove in alcuni casi la temperatura discende sino a 240° e 235° per risalire sino a 262° e mantenersi costante un certo tempo. La durata anzi di questo arresto varia col variare della concentrazione, ed è maggiore per i miscugli contenenti dal 5 al 10 % di $BiCl_3$.

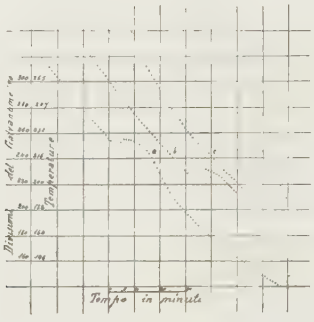

Fig. 2.

a, Curva di raffreddamento del $BiCl_3$ di Kahlbaum. — *b*, Curva di raffreddamento del $BiCl_3$ di Erba. — *c*, Curva di raffreddamento del $BiCl_3$ di Erba da noi risublimato.

Per le concentrazioni dal 40 all'80 % di $BiCl_3$, la temperatura non risale più a 262°, ma rimane sempre al disotto, e tanto più quanto più grande è la percentuale di $BiCl_3$. Per le concentrazioni superiori all'80 % di $BiCl_3$ quell'effetto termico non è più visibile. Per le concentrazioni comprese fra il 15 e l'85 % circa di $BiCl_3$ intorno a 190° si osserva un secondo arresto che va a mano a mano aumentando col crescere della percentuale del $BiCl_3$. Naturalmente questo è dovuto al solidificarsi della soluzione di bismuto in tricloruro di bismuto. Per concentrazioni superiori all'85 % si dovrebbe osservare un principio di cristallizzazione, seguìto da un arresto intorno alla temperatura di 190°, dovuto alla solidificazione di $BiCl_3 + Bi$; ma esso non si rivela perchè il $BiCl_2$ fuso subisce un notevole sopraraffreddamento. Lo sviluppo di calore in questo caso è da attribuirsi esclusivamente a questa causa, per varie ragioni. Primo perchè quando questo avviene la massa è ancora del tutto liquida, poi si riesce talora ad impedirlo con

una forte agitazione ed è tanto maggiore quanto più puro è il $BiCl_3$, come si rileva dalle curve riportate nella figura 2ª. L'andamento generale delle curve ottenute dai singoli miscugli per ciò che riguarda la formazione dei cristalli presenta dunque molte incertezze, per cui la natura loro dev'essere dedotta da altre considerazioni, che esporremo in una prossima Nota insieme con altre esperienze, dall'insieme delle quali è dato trarre le definitive conclusioni su questo sistema.

Mineralogia. — *Note preliminari su alcuni minerali del giacimento metallifero di Borgofranco d'Ivrea* (1). Nota di G. Lincio, presentata dal Socio C. Viola.

Del giacimento metallifero di Borgofranco, sulla sinistra della Dora Baltea, non si hanno che scarse e sommarie notizie.

Jervis e Baretti (2) ci indicano i seguenti minerali:

pirrotina nichelio-cobaltifera con calcopirite in piccola quantità;

arsenico nativo, aurifero (fino a 0.0015 % Au), abbondante, associato a baritina;

panabase bismutifero con ganga dolomitica;

galena, pirite, arsenite ed orpimento.

Il giacimento sarebbe localizzato in micaschisti metamorfici mineralizzati.

Anni or sono, mi proposi d'intraprendere uno studio di tale accentramento di minerali, interessante tanto dal lato mineralogico quanto da quello genetico, e mi recai a Borgofranco; ma ne rimasi ben tosto deluso. Le condizioni di abbandono e l'inaccessibilità delle miniere, già colà esercite, non mi permisero le ricerche prefissemi, e dovetti limitarmi allo studio del materiale, consistente prevalentemente in arnioni d'arsenico nativo, che si trovava ancora in quantità presso lo stabilimento.

In questi arnioni notai che, talora, fra strato e strato del metallo s'interpone uno straterello di un minerale di color grigio piombo, finemente fibroso, con fibre normali alla superficie degli strati incassanti. Detto minerale è meno ossidabile dell'arsenico, e come tale, e per la sua fibrosità, lo si può riconoscere anche su campioni già alquanto alterati dall'azione dell'aria e dell'umidità.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Modena, 10 febbraio 1916.

(2) Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia*, 1873; parte prima, pag. 115; Baretti, *Geologia della provincia di Torino*, 1893, pag. 664.

Riuscii a prepararne alcuni grammi; e li tolsi solo dalla parte mediana delle fibre, perchè le estremità di quest'ultime portano sempre appiccicato dell'arsenico nativo.

L'analisi chimica mi diede i risultati seguenti:

As	=	90,91
$As_2 O_3$	=	5,23
Sb	=	1,03
Pb	=	1,02
Ag	=	0,83
Cu	=	0,12
Fe	=	0,07
S	=	0,74
		99,95

Va notato che dal materiale originale, per mezzo di ammoniaca, si estrae la quantità suindicata di $As_2 O_3$, così che noi possiamo eliminare i 5,23 % che forse non sono altro che piccole quantità di arsenolite inchiuse tra le fibre del minerale, o anche un prodotto d'ossidazione del medesimo. Così pure trascurabili sono gli 0,07 % di ferro.

Riducendo allora i dati dell'analisi a 100, e calcolando il rapporto atomico degli elementi accessorî dell'arsenico, abbiamo:

			Rapporto atomico
As	=	96,04	
Sb	=	1,09	. . . 9
Pb	=	1,08	. . . 5
Ag	=	0,88	. . . 8
Cu	=	0,13	. . . 2
S	=	0,78	. . . 24
		100,00	

Stabilendo il rapporto atomico, da principio intendevo indagare sulla eventuale presenza d'un solfosale incluso nella massa preponderante dell'As metallico del nostro materiale d'analisi; ma ben presto mi convinsi che per tutti i solfosali considerabili si ha sempre un forte eccesso di zolfo libero.

D'altra parte è noto come insieme con l'arsenico nativo di altre località si trovi sempre dell'antimonio metallico, il quale talora suole anche ricoprire gli arnioni di arsenico con una sottile patina, caratteristica pel suo color bianco che non annerisce all'aria: ciò che venne osservato anche su materiale del nostro giacimento.

E poi le analisi dell'arsenico nativo di varie località ci indicano pure, oltre alla presenza di antimonio metallico, quella di zolfo libero.

Solamente pel caso del piombo è molto probabile che esso sia unito a zolfo in forma di galena. Come vedremo in seguito, appunto nel nostro giacimento si osserva che, insieme con l'arsenico nativo e sparpagliate in esso, si trovino quantità rilevanti di galena.

Con ciò si può con una certa probabilità ritenere che l'Sb, l'Ag, il Cu e la maggior parte del S si trovino insieme coll'As allo stato metallico.

Rimaneva da determinare se il minerale analizzato sia una massa omogenea o no. Ne scaldai a tal uopo ed arroventai lentamente alcuni pezzetti su lastra di porcellana e, fatti così evaporare l'arsenico e l'antimonio metallico, osservai che rimaneva un piccolo residuo. Questo lasciava scorgere ancora la forma originale del pezzetto di minerale sottoposto all'arroventamento, e al microscopio si mostrava quale un reticolato con barrette di sostegno più grosse, disposte nel senso della lunghezza delle fibre del minerale e con intreccio trasversale velloso, assai più fine. Disponendo di maggior quantità di materiale, sarebbe stato interessante l'analizzare il residuo che si otterrebbe dal nostro minerale dopo l'arroventamento all'aria o in ambiente neutro, naturalmente non trascurando l'azione che eserciterebbe l'arsenico a temperatura elevata sulla sostanza del reticolato.

Ad ogni modo, noi possiamo definire il nostro minerale quale un arsenico nativo antimonifero, in cui si trovano ramificate notevoli quantità di Ag e poco Cu, forse metallici, e sparse nella massa impurità quali As_2O_3, PbS, S e tracce di ferro.

Interessante dal lato genetico è il fatto che sullo strato inferiore degli arnioni dell'arsenico nativo, che suole incassare il nostro minerale, ad un dato punto, per mutate condizioni d'ambiente, si sia formato ed innalzato il reticolato surriferito, il quale poi, riattivatasi al par di prima la formazione dell'arsenico metallico, venne da questo rinserrato nella sua massa e ricoperto dallo strato superiore dell'arnione.

Le barrette del reticolato, che sono disposte normalmente alle pareti dell'arsenico incassante, fecero così assumere al nostro minerale la forma fibrosa indicata.

Mi sia ancora permesso di accennare ai minerali concomitanti dell'arsenico nativo, quali si presentano nel materiale d'esame.

Anzitutto si trova frequente la galena con ganga di dolomite ferrifera e di quarzo.

In geodine si notano la galena cristallizzata in piccoli ottaedri, insieme con prismetti di quarzo e con cerussite in tipiche laminette incolori.

Poi si osserva che, mentre la galena si trova disseminata in strati inferiori d'arsenico nativo, sopra di essi si è formato l'arsenico fibroso da noi studiato, e quest'ultimo venne a sua volta ricoperto da uno strato di arsenico nativo e da uno strato superiore di dolomite ferrifera.

Notai pure masserelle di tetraedrite a contatto coll'arsenico nativo e coll'arsenico fibroso, insieme con dolomite ferrifera e baritina laminare tondeggiante.

In una geodina, insieme con cristalli di quarzo ricoperti da limonite, trovai su galena un cristalletto di zolfo nativo.

Su altro campione, in geodine, entro l'arsenico nativo spiccano esili cristalletti di antimonite a gruppi radiali.

Finalmente si notano qua e là, sull'arsenico nativo, scagliette d'orpimento ed arsenolite polverulenta.

Patologia. — *Ulteriori ricerche sulla possibile trasmissione delle tripanosomiasi animali nell'uomo: le reazioni biologiche nelle tripanosomiasi umane ed animali nella identificazione dei virus* [1]. Nota II del prof. dott. Alessandro Lanfranchi, presentata dal Socio B. Grassi.

In una prima Nota [2] ho reso noto i risultati ottenuti ricercando il potere agglutinante del mio siero, rispetto ai tre *virus Lanfranchii*, *Gambiense*, *Evansi*; nella presente riporto quelli ottenuti ricercando il potere tripanolitico di detto siero.

Come controllo, nella ricerca di detto potere, feci uso di sei sieri umani normali, gentilmente favoritimi dalla Clinica medica della R. Università di Bologna.

Tutte le cautele, anche in tale ordine di ricerche, furono prese, per allontanare qualsiasi causa di errore.

Il potere tripanolitico del mio siero è stato saggiato di fronte ai tre *virus* già detti, per rilevare, così, come gli anticorpi lisinanti, in esso contenuti, si sarebbero comportati di fronte ad ogni singolo *virus*; non solo, ma anche le differenze che i resultati avessero presentate, se messi in comparazione con quelli ottenuti, e resi noti, nelle mie antecedenti ricerche.

Anche in questo caso ho cercato stabilire la ricchezza in anticorpi lisinanti che il siero poteva contenere.

A tale scopo, delle due vie che potevo seguire — saggiare tale potere prendendo in esame le reazioni ottenute mescolando in proporzioni identiche siero e sangue contenente i tripanosomi e lasciandoli per un differente pe-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di patologia e clinica medica veterinaria nella R. Università di Bologna.

(2) Al. Lanfranchi, *Ulteriori ricerche sulla possibile trasmissione delle tripanosomiasi animali nell'uomo*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1916.

riodo di tempo in termostato; ovvero porre a contatto diversa quantità di siero (fattore variabile) con una stessa quantità di sangue ricco in tripanosomi (fattore costante) — ho prescelto la seconda, anche perchè le condizioni fossero eguali a quelle delle antecedenti ricerche.

Le differenti diluizioni venivano esaminate dopo un'ora di permanenza al termostato, poichè è ormai stabilito che tale tempo deve considerarsi come limite, di là dal quale i tripanosomi si alterano anche nel siero normale.

La tecnica seguìta fu quella indicata da Laveran e Mesnil nel loro trattato.

I controlli furono due: l'uno adoperando i sieri normali, l'altro con la soluzione fisiologica.

Dati i resultati ottenuti con le ricerche preliminari, quattro furono le prove fatte con ciascun *virus* e con le seguenti soluzioni: una goccia di sangue di ratto con numerosi tripanosomi in circolo e cinque goccie del mio siero o siero normale o di soluzione fisiologica; una goccia di sangue di ratto ecc., e tre goccie di mio siero ecc.; e gradualmente una goccia di sangue ed una del mio siero, o di siero normale, o di soluzione fisiologica; una goccia di sangue e mezza goccia del mio siero ecc.

Anche in queste ricerche, i *virus* furono diluiti nella medesima proporzione di soluzione citrosodica, e furono sempre adoperate pipette dello stesso calibro. Nell'apprezzare i resultati si tenne presente lo stato di perfetta mobilità dei parassiti.

Riporto nella tabella sottostante i resultati ottenuti:

Virus →	*Lanfranchii*	*Gambiense*	*Evansi*	*Sieri* ↓	
una goccia ↑	+	+	+	5 goccie	S. L.
	+	+	+		S. N.
	+	+	+		S. F.
	—		—	3 goccie	S. L.
	+	+	+		S. N.
	+	+	+		S. F.
			+	1 goccia	S. L.
	+	+	+		S. N.
	+	+	+		S. F.
	+	+	+	½ goccia	S. L.
	+	+	+		S. N.
	+	+	+		S. F.

In genere, in tutte le prove furono considerati come risultati positivi solo quelli nei quali si aveva tripanolisi completa (—), negativi gli altri (+);

però, per quanto si riferisce alla quarta ed ultima prova (nella soluzione costituita da una goccia di sangue contenente il Trip. Laufranchii, e da $^1/_2$ goccia del mio siero, devo rilevare come, esaminando diversi preparati, vi fossero ancora dei parassiti in via di disgregazione, e rarissimi immobili ma ancora integri.

Tuttavia era bene apprezzabile la differenza fra questo ed il resultato di tutte le altre prove nelle quali ho segnato assenza di tripanolisi (+).

Se infatti i parassiti si fossero solo presentati immobili, potevo chiedermi fino a qual punto ciò poteva stare in rapporto con la presenza di *immobilisine*, che possiamo supporre debbano verificarsi anche nelle infezioni a tripanosomi, dal momento che per parassiti ad essi molto affini quali gli spirilli, Nietch, Sawtchenko, Marchoux e Levaditi, hanno dimostrato la loro presenza nel sangue dei mammiferi. Ma, come ho detto, i tripanosomi, salvo rarissimi, o avevano subìto una lisi completa, od erano in via di disgregazione. Ciò indubbiamente sta a parlare per l'azione degli anticorpi lisinanti; ed il resultato non completo può interpretarsi con l'avere raggiunto, con l'impiego del siero, e leggermente oltrepassata la quantità minima in rapporto a quella fissa del *virus*; in una sola parola, con l'avere forzata al massimo la reazione.

Fatta tale constatazione, si deve riconoscere come egualmente, a quelli agglutinanti, siano aumentati gli anticorpi lisinanti, e quindi il potere tripanolitico.

F. Heckenroth e M. Blanchard [1] hanno notato come sia soprattutto nei malati non trattati che si trovano le più elevate proporzioni di reazioni positive, e come ciò sia naturalmente in quelli nel cui sangue i tripanosomi vengono sovente messi in evidenza, tanto che si chiedono:

« L'infezione sanguignea sarebbe adunque una condizione che favorisce tale reazione? ».

A conferma di quanto dicono tali autori, ricordo solo che nel caso mio la cura era stata sospesa da sei mesi.

Circa poi la supposizione di un rapporto tra infezione sanguigna e reazione tripanolitica, il mio caso verrebbe pure in appoggio.

Già Martin e Darré [2] hanno fatto rilevare « l'abbondanza relativa-« mente grande dei parassiti nel sangue periferico, raramente osservata in « tale grado nelle infezioni *a gambiense* ».

Una ricaduta sanguigna si era in me verificata poco tempo prima del prelevamento del siero.

[1] F. Heckenroth e M. Blanchard, *Recherches sur l'éxistence des propriétés tripanolitiques*, ecc. Ann. de l'Instit. Pasteur, 1913, pag. 750.

[2] Martin et Darré, *Un cas de trypanomiase humaine contractée en laboratoire*. Bull. Soc. path. éxotique, 1912, pag. 883.

Ciò corrisponde perfettamente a quanto Heckenroth e Blanchard riportano: « De même, chez quatre malades n'ayant pas eu du traitement depuis « plusieurs années, et faisant une rechute sanguigne, nous avons constaté « quatre trypanolyses positives ».

Ho detto sopra come il mio siero fosse più ricco di anticorpi lisinanti, che non alle prime ricerche. Ed infatti, mentre in quelle abbisognò la proporzione di una goccia del mio siero ed una del *virus* corrispondente per aver la lisi, in queste è stata bastante una dose di siero assai minore sino quasi a raggiungere quella di $^1/_2$ goccia per avere lo stesso effetto, ferma restando la quantità del *virus*.

Questa maggiore ricchezza in anticorpi lisinanti esiste anche per gli altri due *virus*, di modo che non sono stati turbati i rapporti di equilibrio verificatisi antecedentemente.

Per tale ordine di ricerche si deve quindi confermare quanto già rilevai: e cioè che il *virus Lanfranchii* sarebbe assai più vicino al *gambiense* che non all'*Evansi*.

Il confermato differente comportamento del siero considerato sotto, il punto di vista del potere agglutinante (vedi Nota I) e lisinante, verrebbe in appoggio alle vedute di coloro che tendono ad attribuire ai diversi anticorpi, dovuti ad uno stesso antigeno, dei caratteri di specificità; così le agglutinine sarebbero diverse dalle precipitine, e tutte e due di natura diversa dagli anticorpi protettori e dalle sensibilizzatrici. (Laveran e Mesnil, parlando delle proprietà protettrici rispetto ai tripanosomi, affermano che esse sono certamente indipendenti dalle altre proprietà del siero: tripanolitiche, agglutinanti, ecc.).

Ammesso ciò, si può ritenere che per un dato antigeno i diversi anticorpi siano dotati di una specificità di azione o di comportamento più o meno marcata: in altre parole, che sieno atti a risentire gli uni più degli altri l'influenza delle cambiate condizioni ambientali nelle quali vengono a formarsi, specie « étant donnée la constitution complèxe des matières protéiques qui servent de support à ces anticorps » (Levaditi e Muttermilch).

Gli stessi AA. [1], con le loro ricerche, hanno visto come « un seul et « unique entigène peut donc provoquer la production d'anticorps microbicides « profondément dissemblables, suivant l'espèce animale qui le reçoit; en « d'autre termes, le même anticorps lytique, ou agglutinant, ou precipitant, « peut offrir des différences de constitution, suivant l'espèce animale qui le « fabrique, différences qui seront d'autant plus marquées que les espèces « productrices seront plus eloignées dans l'échelle des êtres vivants ».

Nel caso presente può supporsi che l'antigeno *trip. Evansi* penetrato nel mio organismo, per le nuove condizioni di vita ad esso, offerte abbia dato

[1] Levatidi e Muttermilch, lavoro cit., pag. 951.

luogo ad anticorpi come quelli agglutinanti, che, avendo assunto più spiccate proprietà agglutinogene, hanno quindi mantenuto il loro potere marcato di azione più di fronte al *virus surra* che non verso il *gambiense*; mentre quelli lisinanti, possedendo una elettività minore di azione, hanno subìto in maggior grado l'influenza delle mutate condizioni, in rapporto alla umanizzazione del *virus surra* accidentalmente penetrato nell'organismo, assumendo quindi maggiore specificità di azione di fronte al tripanosoma *gambiense* che non all'*Evansi*.

Come corollario di tale deduzione, un'altra ne consegue. Dai resultati delle mie prime ricerche è emerso evidente il fatto che, se il *virus*, che mi ha infettato, nessun rapporto o legame biologico ha con il *virus rodesiense* (che è pure un *virus* umano), esso presenta invece infiniti punti di contatto col *virus gambiense*, tanto da far ritenere esistere per lo meno una stretta parentela fra i due *virus Evansi* e *gambiense*.

Se gli scienziati inglesi, con alla testa Davide Bruce, ritengono che i trip. *Brucei* e *rodesiense* sono identici, e che i casi umani sono rari, in rapporto alla poca sensibilità dell'uomo per il *Brucey*, perchè non ammettere che tripanos. *Evansi* e *gambiense* sieno pure identici, e che i casi dell'uomo riconoscano la medesima ragione in rapporto alla loro rarità?

Certo che i resultati delle ricerche tutte, fino ad oggi da me eseguite, sarebbero in appoggio di una tale ipotesi.

Fisiologia. — *Ricerche sulla scissione enzimatica dei polipeptidi per azione di estratti di tessuti e di organi animali* (1). Nota II del dott. A. Clementi, presentata dal Socio L. Luciani.

II.

Su una proprietà fisico-chimica nuova della leucilglicina e della glicocolla.

Le ricerche eseguite sull'azione dell'estratto di fegato di svariati animali sul dipeptide *d*-l-leucilglicina, su cui ho riferito nella Nota precedente (2), mi hanno offerto l'opportunità di rilevare, a carico del dipeptide *d*-l-leucilglicina, l'esistenza di una *proprietà* di indole fisico-chimica, finora non descritta per i polipeptidi e per gli aminoacidi, su cui intendo richiamare brevemente l'attenzione: questa proprietà consiste nell'attitudine della leucilglicina e della glicocolla a favorire o determinare (in speciali condizioni di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) A. Clementi, *Ricerche sulla scissione enzimatica dei polipeptidi per azione di estratti di tessuti e di organi animali*. Nota I.

temperatura e di diluizione) la fiocchificazione, e in parte, la precipitazione lenta dei proteici degli estratti acquosi di organi.

Il fatto sperimentale osservato nelle ricerche suaccennate è il seguente:

Nelle esperienze 1ª, 2ª e 3ª il campione di estratto epatico, a cui era stato aggiunto il dipeptide *d*-l-leucilglicina, dopo la permanenza in termostato a 37° era *limpido e trasparente*, e presentava, sospesi nella parte bassa del recipiente, *numerosi fiocchi e coaguli di aspetto grigiastro*, laddove il campione del medesimo estratto, che serviva da controllo, *non* era limpido, ma solo *lievemente e uniformemente torbido* e *non* conteneva coaguli o fiocchi.

Questo aspetto fisico-chimico nettamente diverso nei due campioni dimostra che la presenza della *d*-l-leucilglicina e dei due componenti leucina e glicocolla può determinare o favorire, negli estratti acquosi di fegato di alcuni vertebrati, il fenomeno fisico-chimico della fiocchificazione e della precipitazione.

Che anche aminoacidi semplici (ad es. la glicocolla) possono esercitare un'azione fisico-chimica analoga tale da favorire (o determinare) alla temperatura di 37° il fenomeno della fiocchificazione e, in parte, della precipitazione dei proteici in estratti acquosi di organi, viene confermato dalla seguente esperienza: Di uno stesso estratto acquoso (molto diluito) di fegato di embione umano furono prelevati due campioni: ad uno solo si aggiunse della glicocolla; ambedue si posero in termostato a 37°; dopo 12 ore, si potè constatare che nel campione a cui era stata aggiunta la glicocolla erano apparsi *numerosi piccoli coaguli e fiocchi*, i quali *mancavano completamente* nell'altro campione.

Uno dei quesiti più importanti, che mi propongo di risolvere con ulteriori ricerche, riguarda il carattere di quest'azione fisico-chimica esercitata dalla glicocolla e dalla *d*-l-leucilglicina: se cioè essa è una *proprietà generale degli aminoacidi* in genere, o solo una proprietà *speciale* di alcuni aminoacidi. Inoltre va chiarita la natura dei corpi che dànno luogo al fenomeno della fiocchificazione e della coagulazione osservata (se cioè si tratta di proteine semplici, di peptoni, di proteosi o di plasteine); va studiata infine questa azione in rapporto al suo intimo determinismo fisico-chimico. Mi propongo anche di studiare la importanza biologica del fenomeno in questione, specie in rapporto ad una eventuale analogia tra quest'ultimo e il fenomeno prodotto dall'azione delle *precipitine* contenute *nei sieri immuni* sul siero di sangue, sugli estratti di corpi batterici, ecc., poichè teoricamente si potrebbe pensare — ammettendo l'ipotesi che le *precipitine siano fermenti peptidolitici difensivi* [1] — che, a produrre la loro caratteristica azione fisico-chimica, par-

[1] Alderhalden und Pincussohn, *Ueber den Gehalt des Kaninchens- und Hundeplasmas an peptolytischen Fermenten unter Verschiedenen Bedingungen* (I. Mitt. Zeitschrift f. physiol. Chemie, *61*, pag. 200, an. 1909); Alderhalden und Weichardt, *Ueber den Gehalt des Kaninchenserums an peptolytischen Fermenten unter Verschiedenen Bedingungen* (II. Mitt. Zeitschrift f. physiol. Chemie, *62*, pag. 120, an. 1909).

tecipino gli aminoacidi resi liberi dalla loro stessa azione peptidolitica. Finora credo di potere affermare pertanto, che il *dipeptide leucilglicina* e gli *aminoacidi leucina e glicocolla* hanno il potere di *agevolare* o *determinare* alla temperatura di 37°, anche se presenti in piccola quantità, *fenomeni di fiocchificazione e di coaugulazione* negli estratti acquosi epatici assai diluiti, nei quali, alle stesse condizioni di temperatura e di diluizione, spontaneamente tali fenomeni non hanno luogo.

ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, si procedette alle elezioni di Soci e di Corrispondenti dell'Accademia. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Furono eletti Soci nazionali:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: Ricci Gregorio; per l'*Astronomia*: Abetti Antonio; per la *Geogr. mat. e fisica*: Reina Vincenzo

Nella Categoria II, per la *Cristallografia e Mineralogia*: Artini Ettore.

Furono eletti Corrispondenti:

Nella Categoria I, per la *Meccanica*: Guidi Camillo.

Nella Categoria IV, per la *Fisiologia*: Lo Monaco Domenico.

L'esito delle votazioni venne proclamato dal Presidente con Circolare del 17 febbraio 1916; le nomine dei Soci nazionali furono sottoposte all'approvazione Sovrana.

Nell'adunanza generale del 5 gennaio 1916, si procedette alla elezione dell'Amministratore e dell'Amministratore aggiunto. Risultarono eletti come Amministratore il Socio Pirotta Romualdo con 35 voti su 37 votanti, e come Amministratore aggiunto il Socio Balzani Ugo con votazione eguale alla precedente.

E. M.